UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
BIBLIOTECA DE OBJETOS MATEMÁTICOS
COORDENADOR: Dr. MARCIO LIMA

TEXTO:
Torre de Hanói

AUTORES:
Mayara Brito
(estagiária da BOM)
André Brito
(estagiário da BOM)

ORIENTADOR:
Dr. Professor Márcio Lima
(coordenador da BOM)

Torre de Hanói

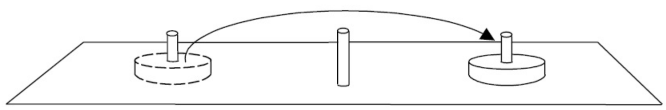
Você conhece ou já viu esse jogo? Faz ideia de como jogar? Gostaria de saber? Então vamos conhecer a Torre de Hanói.

Torre de Hanói é um jogo criado pelo matemático francês Edouard Lucas em 1883.O jogo também é conhecido por torre de bramanismo ou quebra-cabeças do fim do mundo. O jogo consiste em uma base de madeira onde estão firmados três hastes verticais, e um certo número de discos de madeira, de diâmetros diferentes, furados no centro.

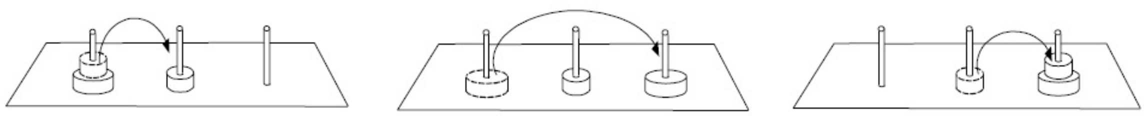
Foi baseado em uma lenda Hindu, a qual falava de um templo em Benares, cidade Santa da Índia, onde existia uma torre sagrada do bramanismo, cuja função era melhorar a disciplina mental dos jovens monges. De acordo com a lenda, no grande templo de Benares, debaixo da cúpula que marca o centro do mundo, há uma placa de bronze sobre a qual estão fixadas três hastes de diamante. Em uma dessas hastes, o deus Brama, no momento da criação do mundo, colocou 64 discos de ouro puro, de forma que o disco maior ficasse sobre a placa de bronze e os outros decrescendo até chegar ao topo. A missão dada aos mongens foi que eles transferissem a torre de uma haste para a outra, ultilizando a terceira como auxiliar, seguindo as seguintes regras: movendo apenas um disco por vezes e nunca colocar um disco maior em cima de um menor. Os monges deveriam trabalhar com eficiência noite e dia e, quando terminassem o trabalho, o templo seria transformado em pó e o mundo acabaria.

Como já foi dito o objetivo do jogo é passar a torre para uma haste diferente, ultilizando a outra como auxiliar, obdecendo as duas regras. Sendo assim, surge uma pergunta chave: qual o número mínimo de movimentos para realizar o jogo? você saberia responder? Antes de responder tal pergunta, é necessário estudar o objeto, então vamos lá.

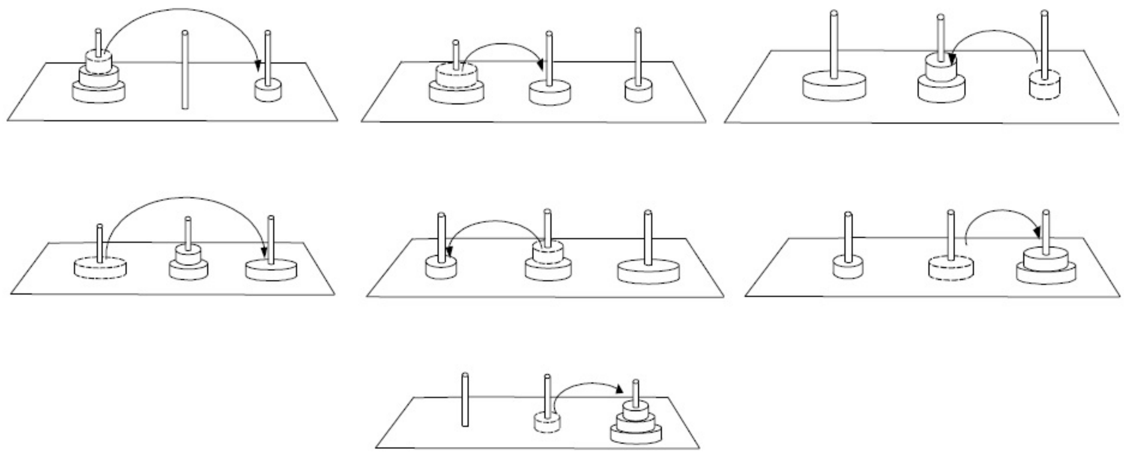
Para facilitar o entendimento e verificar que você realmente entendeu as regras do jogo, vamos resolver a Torre de Hanói com um disco. Observe:



Para resolver a Torre de Hanói com um disco é necessário apenas um movimento. E com dois discos? Veja a figura a baixo, observe que são necessário no mínimo três movimentos, independente da haste que você escolha como sendo a haste final.



Agora tente resolver uma torre de Hanói com três discos com o número mínimo de movimentos, quantos movimentos serrão necessários? veja na figura abaixo a solução para deslocar a torre para a haste do lado oposto, e são necessários 7 movimentos no mínimo.



Agora que você já entendeu como resolver po jogo com um, dois e três discos, e sabe o número mínimo de movimentos de cada um, mas é claro que não podemos ficar testando o número mínimo de jogadas para n discos, então vamos começar a tirar algumas conclusões.

Vamos conderar uma torre com n discos numerendo como 1 o menor disco e n o maior disco $(1, 2, 3, ..., n)$. Para remover o disco n é preciso tirar todos de cima, ou seja, tirar todos os $n-1$ discos que estão acima dele colocando-os em uma das hastes, feito isso, mova o disco n para a haste restante. Agora mova de acordo com as regras os $n-1$ para a haste que se encontra o disco n. Obeserve que você move os $n-1$ discos duas vezes e o disco n apenas uma. De modo matemático, seja $\beta(n)$ o número mínimo de movimentos para resolver uma Torre de Hanói com n discos, $\beta(n-1)$ é o número mínimo de movimentos para $n-1$ discos, então temos:

$$\beta(n) = \beta(n-1) + 1 + \beta(n-1)$$
$$\beta(n) = 2\beta(n-1) + 1$$

Como definimos $\beta(n)$ sendo o número mínimo de movimento, podemos verificar o seguinte:
$\beta(1) = 2\beta(1-1) + 1 = 2 * 0 + 1 = 1$
$\beta(2) = 2\beta(2-1) + 1 = 2\beta(1) + 1 = 2 * 1 + 1 = 3$
$\beta(3) = 2\beta(3-1) + 1 = 2\beta(2) + 1 = 2 * 3 + 1 = 7$
$\beta(4) = 2\beta(4-1) + 1 = 2\beta(3) + 1 = 2 * 7 + 1 = 15$
$\beta(5) = 2\beta(5-1) + 1 = 2\beta(4) + 1 = 2 * 15 + 1 = 31$
$\beta(6) = 2\beta(6-1) + 1 = 2\beta(5) + 1 = 2 * 31 + 1 = 63$

Desse modo você pode descobrir o número mínimo de movimentos para n discos se souber o número de $n-1$. Mesmo assim ainda está complicado, então observe o quadro a baixo.

Nº de discos	Quantidade mínima de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63

Analise bem o quadro, e observe que:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 7 & \rightarrow & 15 & \rightarrow & 31 & \rightarrow & 63,\ldots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
+2 & & +4 & & +8 & & +16 & & +32 & &
\end{array}$$

Podemos notar então, que o número somado é sempre o dobro do anterior, que já havia sido somado, ou seja, de 1 para 3 foi somado dois, e de 3 para 7 foi somado $4 = 2_*2$, e assim sucessivamente. Outra observação importante é a relação entre o número de movimentos com a soma, por exemplo do 1 para o 3 foi somado 2, e do 3 para o 7 foi somado 4, observe que é sempre somamos o sucessor do número, em outras palavras, temos que o resultado da quantidade mínima de movimentos é sempre 1 a menos do número que foi somado. Veja o quadro a baixo:

nº de discos	**Quantidade mínima de movimentos**	**nº somado**
1	1	-1 ← +2
2	3	-1 ← +4
3	7	-1 ← +8
4	15	-1 ← +16
5	31	-1 ← +32
6	63	-1 ← +64

Veja que o número somado é um número do tipo 2^n , e assim a sequência de números somados forma a PG: $(2, 4, 8, 16, 32, ...)$ de razão $q = 2$. Logo, a quantidade mínima de movimentos é igual ao número somado menos 1, ou seja, igual a $2^n - 1$. Então descobrimos que $\beta(n) = 2^n - 1$.

Porém, precisamos prova que a fórmula encontrada é válida, já que ela foi dedusida através de alguns experimentos, mas na matemática isso não é suficientemente necessário para dizer que a fórmula é válida, precisa ser provado que a fómula vale para todo n (número de discos). Para provar a forma que deduzimos, usaremos um processo chamado *Indução Matemática* ou *Indução Finita*.

Base de Indução: Para n=1
$2^n - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$, o que está certo pelo nosso quadro anterior.

Hipótese de Indução: Suponhamos que a fórmula $2^n - 1$ é válida para algum $n > 1$. Portanto,

$\beta(n) = 2^n - 1$

Tese de Indução: Usamos a Hipótese de Indução para provar que a fórmula também vale para $n + 1$.

Temos que

$$\beta(n) = 2\beta(n-1) + 1$$

Ou, equivalentemente:

$$\beta(n+1) = 2\beta(n) + 1$$

Pela Hipótese de Indução,

$$\beta(n+1) = 2(2^n - 1) + 1$$
$$\beta(n+1) = 2 * 2^n - 2 + 1$$
$$\beta(n+1) = 2^{n+1} - 1$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, $\beta(n) = 2^n - 1$ para todo número n natural e maior que 1.

Pronto, a fórmula está provada, e já sabemos que ela nos dá o número mínimo de movimentos para solucionar a Torre de Hanói.